INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2,
Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 11 februarie 2012

Clasa a XI-a

1). Fie $A, B \in M_n(Z)$ astfel încât numerele $\det A$ şi $\det(A+B)$ sunt întregi impare. Demonstraţi că $\det(A+kB) \neq 0$ pentru $k \in Z$.

2). Se dă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 \in (0,1)$ şi $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$, $\forall n \in N^*$

Să se arate că: $\lim\limits_{n\to\infty}(n \cdot a_n) = 1$.

3). Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+...+\sqrt[n]{x}-n}{x^n-1}\right)$, $\forall\ n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$.

4). Fie $A, B \in M_2 \in (\mathbf{R})$ astfel încât Tr(AB)=3 şi det(AB) = 1. Să se arate că:

a) Matricea A este inversabilă

b) $(BA)^{-1} = 3I_2 - BA$

NOTĂ:
Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu maxim 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore